FOGLIO DI ESERCIZI 9

GEOMETRIA 2 (2021-2022) - UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA
DOCENTI: FRANCESCO POLIZZI, TOMMASO GENTILE

Esercizio 1. Una funzione $f: X \to Y$ fra due G-spazi si dice G-*equivariante* se $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$ per ogni $g \in G$ e $x \in X$. Dimostrare che se $f: X \to Y$ è un omeomorfismo G-equivariante, allora esso induce un omeomorfismo $\bar{f}: X/G \to Y/G$.

Esercizio 2. Sia G un gruppo finito e sia X un G-insieme. Se $x \in X$, definiamo lo *stabilizzatore* di x come $G_x := \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$. Dimostrare che G_x è un sottogruppo di G e che la cardinalità dell'orbita $G \cdot x$ è uguale a $|G|/|G_x|$.

Esercizio 3. Dare un esempio di G-spazio X e di un punto $x \in X$ tale che lo stabilizzatore G_x sia un sottogruppo *non* normale di G.

Esercizio 4. Supponiamo che un gruppo *finito* G agisca sullo spazio topologico X come gruppo di omeomorfismi. Dimostrare che la proiezione canonica $\pi: X \to X/G$ è un'applicazione chiusa.

Esercizio 5. Consideriamo l'azione di $\mathbb{Z}$ su $\mathbb{R}$ come gruppo di traslazioni, cioè $(n, x) \mapsto n+x$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$. Dimostrare che la proiezione canonica $\pi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ è aperta ma non chiusa.
Suggerimento: ricordare che $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ è omeomorfo alla circonferenza unitaria S^1.

Esercizio 6. Consideriamo la funzione continua e suriettiva

$$f: [0, 2\pi] \longrightarrow S^1, \quad f(t) = (\cos t, \sin t).$$

Esiste un gruppo di omeomorfismi G su $[0, 2\pi]$ tale che $S^1 = [0, 2\pi]/G$ e f sia la corrispondente proiezione canonica?